Problem 1 *(Propositional Logic)* (7 + 7 = 14 points)

Let Π be a set of propositional variables and let Φ be an arbitrary mapping from Π to Π. For every formula F over Π, let $\Phi(F)$ be the formula that one obtains from F by replacing every propositional variable P in F by the propositional variable $\Phi(P)$.

Part (a)

Prove or give a counterexample: Whenever a formula F is satisfiable, then $\Phi(F)$ is satisfiable.

Part (b)

Prove or give a counterexample: Whenever $\Phi(F)$ is satisfiable, then F is satisfiable.

Problem 2 *(DPLL)* (10 points)

Let N be the following set of propositional clauses:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccl}
\neg P & & & \vee & \neg R & & & \vee & \neg T & & & & (1)\\
\neg P & & & & & & & \vee & T & \vee & \neg U & & (2)\\
 & & & & \neg R & & & \vee & T & \vee & U & & (3)\\
 & & \neg Q & \vee & \neg R & \vee & S & & & & & & (4)\\
\neg P & & & \vee & R & \vee & \neg S & & & & & & (5)\\
 & & Q & & & & & & & \vee & \neg U & & (6)\\
P & & & & & & & & & \vee & U & & (7)\\
P & \vee & \neg Q & & & & & & & \vee & \neg U & & (8)
\end{array}
$$

During a DPLL-derivation, we have reached the state $P^d\, Q^d\, R^d\, S\, \neg T\, U \parallel N$. Give two different backjump clauses that can be used in this situation and give the successor state with respect to $\Rightarrow_{\mathrm{DPLL}}$ for each of these backjump clauses.

Problem 3 *(Algebras)* (7 + 7 = 14 points)

Part (a)

Let $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, where $\Omega = \{b, c, d\}$ and $\Pi = \{p\}$. Let N_1 be the set of formulas $\{\, \forall x\; p(x, x),\ \neg p(b, c),\ \neg p(c, d) \,\}$. Give a Σ-algebra with the universe $\{1, 2\}$ that is a model of N_1.

Part (b)

Let $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, where $\Omega = \{b, f\}$ and $\Pi = \{q\}$. Let N_2 be the set of formulas $\{\, \forall x\; \neg q(x, x),\ \forall x\; \neg q(x, b),\ \forall x\; q(x, f(x)) \,\}$. Give a Σ-algebra with the universe $\{1, 2, 3\}$ that is a model of N_2.

Problem 4 *(Terms)* (10 points)

Let s, t, r be terms with $p \in \text{pos}(s)$ and $q \in \text{pos}(t)$.
Prove: $(s[t]_p)[r]_{p.q} = s[t[r]_q]_p$.

Problem 5 *(Unification)* (10 points)

Solve the following unification problem using either $\Rightarrow_{SU}$ or $\Rightarrow_{PU}$:

$$E = \{\, f\big(x, g(x), g(c)\big) \doteq f\big(f(y, g(y), c), g(f(z, g(b), y')), z\big) \,\}.$$

Problem 6 *(Resolution)* (12 points)

Refute the following clause set via resolution.

$$\begin{array}{ll}
p(a, z) & (1) \\
\neg q(u) \;\vee\; \neg p(u, a) & (2) \\
r(a) & (3) \\
\neg r(v) \;\vee\; q(g(v)) & (4) \\
\neg p(y, g(y)) \;\vee\; p(g(x), y) & (5)
\end{array}$$

For each inference give the parent clause numbers and the resulting clause.

Problem 7 *(Simplification)* (10 points)

Consider the following simplification

$$N \cup \{C \vee L_1 \vee L_2\} \;\triangleright\; N \cup \{C \vee L_2\}$$

where $\sigma = \text{mgu}(L_1, L_2)$, $L_2\sigma = L_2$ and $C\sigma \subseteq C$. Show that it is sound and complete in the following sense:

1. Prove that $\{C \vee L_1 \vee L_2\} \models C \vee L_2$.
2. Prove that $C \vee L_1 \vee L_2$ is redundant with respect to $N \cup \{C \vee L_2\}$.

Hint: If known results from the lecture are used appropriately, the overall solution fits on half a page.

Aufgabe 1 *(Aussagenlogik)* (7 + 7 = 14 Punkte)

Sei Π eine Menge propositionaler Variablen und sei Φ eine beliebige Abbildung von Π nach Π. Für jede Formel F über Π sei $\Phi(F)$ diejenige Formel, die man aus F erhält, wenn jede propositionale Variable P in F durch die propositionale Variable $\Phi(P)$ ersetzt wird.

Teil (a)

Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel: Wenn F erfüllbar ist, dann ist auch $\Phi(F)$ erfüllbar.

Teil (b)

Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel: Wenn $\Phi(F)$ erfüllbar ist, dann ist auch F erfüllbar.

Aufgabe 2 *(DPLL)* (10 Punkte)

Sei N die folgende Menge propositionaler Klauseln:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\neg P & & & \vee & \neg R & & & \vee & \neg T & & & \qquad & (1) \\
\neg P & & & & & & & \vee & T & \vee & \neg U & & (2) \\
 & & & & \neg R & & & \vee & T & \vee & U & & (3) \\
 & & \neg Q & \vee & \neg R & \vee & S & & & & & & (4) \\
\neg P & & & \vee & R & \vee & \neg S & & & & & & (5) \\
 & & Q & & & & & & & \vee & \neg U & & (6) \\
P & & & & & & & & & \vee & U & & (7) \\
P & \vee & \neg Q & & & & & & & \vee & \neg U & & (8)
\end{array}
$$

Während einer DPLL-Ableitung haben wir den Zustand $P^d\, Q^d\, R^d\, S\, \neg T\, U \parallel N$ erreicht. Geben Sie zwei verschiedene Backjump-Klauseln an, die in dieser Situation verwendet werden können, und geben Sie für jede dieser Backjump-Klauseln an, wie der Folgezustand bezüglich $\Rightarrow_{\mathrm{DPLL}}$ aussieht.

Aufgabe 3 *(Algebren)* (7 + 7 = 14 Punkte)

Teil (a)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, wobei $\Omega = \{b, c, d\}$ und $\Pi = \{p\}$ ist. Sei N_1 die Formelmenge $\{\, \forall x\; p(x,x),\ \neg p(b,c),\ \neg p(c,d) \,\}$. Geben Sie eine Σ-Algebra mit dem Universum $\{1,2\}$ an, die ein Modell von N_1 ist.

Teil (b)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, wobei $\Omega = \{b, f\}$ und $\Pi = \{q\}$ ist. Sei N_2 die Formelmenge $\{\, \forall x\; \neg q(x,x),\ \forall x\; \neg q(x,b),\ \forall x\; q(x,f(x)) \,\}$. Geben Sie eine Σ-Algebra mit dem Universum $\{1,2,3\}$ an, die ein Modell von N_2 ist.

Aufgabe 4 *(Terme)* (10 Punkte)

Seien s, t, r Terme mit $p \in \mathrm{pos}(s)$ und $q \in \mathrm{pos}(t)$.
Beweisen Sie: $(s[t]_p)[r]_{p.q} = s[t[r]_q]_p$.

Aufgabe 5 *(Unifikation)* (10 Punkte)

Lösen Sie das folgende Unifikationsproblem unter Verwendung von entweder $\Rightarrow_{SU}$ oder $\Rightarrow_{PU}$:

$$E = \{\, f\big(x, g(x), g(c)\big) \doteq f\big(f(y, g(y), c), g(f(z, g(b), y')), z\big) \,\}.$$

Aufgabe 6 *(Resolution)* (12 Punkte)

Widerlegen Sie die folgende Klauselmenge mittels Resolution:

$$\begin{array}{ll} p(a,z) & (1) \\ \neg q(u) \;\vee\; \neg p(u,a) & (2) \\ r(a) & (3) \\ \neg r(v) \;\vee\; q(g(v)) & (4) \\ \neg p(y, g(y)) \;\vee\; p(g(x), y) & (5) \end{array}$$

Geben Sie für jede Inferenz die Nummern der Elternklausel(n) und die resultierende Klausel an.

Aufgabe 7 *(Simplifikation)* (10 Punkte)

Gegeben sei die folgende Simplifikation

$$N \cup \{C \vee L_1 \vee L_2\} \;\triangleright\; N \cup \{C \vee L_2\}$$

wobei $\sigma = \mathrm{mgu}(L_1, L_2)$, $L_2\sigma = L_2$ und $C\sigma \subseteq C$. Zeigen Sie, daß sie in dem folgenden Sinne korrekt und vollständig ist:

1. Zeigen Sie, daß $\{C \vee L_1 \vee L_2\} \models C \vee L_2$.
2. Zeigen Sie, daß $C \vee L_1 \vee L_2$ redundant bezüglich $N \cup \{C \vee L_2\}$ ist.

Hinweis: Falls aus der Vorlesung bekannte Ergebnisse verwendet werden, paßt die Lösung auf eine halbe Seite.