UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.2 – Informatik
Uwe Waldmann
Christoph Weidenbach

Lecture "Automated Reasoning"
(Summer Term 2006)

Supplementary Examination

Name: ....

Student Number: ....

Some notes:

- Things to do at the beginning:

  Put your student card and identity card (or passport) on the table.
  Switch off mobile phones.
  Whenever you use a new sheet of paper (including scratch paper), first write your name and student number on it.

- Things to do at the end:

  Mark every problem that you have solved in the table below.
  Staple the examination text and *all* your solution sheets in the upper left corner (A stapler is available at the supervisors' desk.)
  Note: Sheets that are accidentally taken out of the lecture room are invalid.

Sign here: **Good luck!**

....

Problem	1a	1b	2	3a	3b	4	5	6	7	Σ
Answered?										
Points										

Problem 1 *(Propositional logic)* (7 + 7 = 14 points)

Part (a)

Prove the following statement: If F and G are propositional formulas, $F \rightarrow G$ is valid, and G is not valid, then $\neg(F \vee G)$ is satisfiable.

Part (b)

Refute the following statement: If F, G, and H are propositional formulas, $F \rightarrow G$ is satisfiable, and $G \rightarrow H$ is satisfiable, then $F \rightarrow H$ is satisfiable.

Problem 2 *(CNF transformation)* (10 points)

Transform the following formula into CNF using Miniscoping:

$$\forall x\, (r(x,x) \rightarrow \exists z\, p(z)) \leftrightarrow \exists z\, (p(z) \wedge \forall x\, r(x,z))$$

Problem 3 *(Herbrand interpretations)* (7 + 7 = 14 points)

Let $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ with $\Omega = \{b, c, f\}$, $\Pi = \{p\}$, where b and c have arity 0 and f and p have arity 1.

Part (a)

How many different Herbrand interpretations over Σ do exist? Explain briefly.

Part (b)

How many different Herbrand models over Σ does the formula

$$\forall x\, (p(x) \rightarrow p(f(x))) \wedge \forall x\, (p(f(x)) \rightarrow p(x))$$

have? Explain briefly.

Problem 4 *(Tableaux)* (12 points)

Prove the formula below via a closed AMGU Tableau:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (r(x,y) \vee p(x) \vee r(x,z)) \rightarrow \forall x\, \exists y\, (r(x,y) \vee p(x))$$

Problem 5 *(Critical pairs, LPO)* (10 points)

Let $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ with $\Omega = \{b, f, g, h, k\}$ and let E be the following set of equations:

$$\begin{aligned} \{\ g(f(x), x, b) &\approx f(g(x, x, y)), \\ h(f(h(x))) &\approx k(x), \\ g(h(z), b, z) &\approx g(z, f(b), z)\ \} \end{aligned}$$

Find a precedence $>$ on Ω such that the lexicographic path ordering induced by $>$ has the following properties:

(i) every equation $s \approx t$ in E can be oriented into a rewrite rule $s \to t$ or $t \to s$ whose left-hand side is strictly larger than the right-hand side;

(ii) the resulting set of rewrite rules has no non-trivial critical pairs.

Problem 6 *(Superposition)* (10 points)

A clause C is a *semantic tautology* if C is valid. Prove that the problem whether a clause is a semantic tautology can be decided using the superposition calculus.

Hint: Prove first that every superposition inference between two ground unit clauses is actually a simplification.

Problem 7 *(Superposition)* (10 points)

Consider the clause $C = C' \vee s \approx t$ where $s \approx t$ is strictly maximal in C and $s \succ t$. Prove that the conclusion of the positive superposition inference between C and (a renamed copy of) C on the top position of s is redundant.

Aufgabe 1 *(Propositionale Logik)* (7 + 7 = 14 Punkte)

Teil (a)

Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls F und G propositionale Formeln sind, so daß $F \rightarrow G$ gültig ist und G nicht gültig ist, dann ist $\neg(F \vee G)$ erfüllbar.

Teil (b)

Widerlegen Sie die folgende Aussage: Falls F, G und H propositionale Formeln sind und sowohl $F \rightarrow G$ als auch $G \rightarrow H$ erfüllbar ist, dann ist auch $F \rightarrow H$ erfüllbar.

Aufgabe 2 *(CNF-Transformation)* (10 Punkte)

Transformieren Sie die folgende Formel unter Verwendung von Miniscoping in Klauselnormalform:

$$\forall x\,(r(x,x) \rightarrow \exists z\,p(z)) \leftrightarrow \exists z\,(p(z) \wedge \forall x\,r(x,z))$$

Aufgabe 3 *(Herbrand-Interpretationen)* (7 + 7 = 14 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ mit $\Omega = \{b, c, f\}$ und $\Pi = \{p\}$, wobei b und c die Stelligkeit 0 und f und p die Stelligkeit 1 besitzen.

Teil (a)

Wieviele verschiedenen Herbrand-Interpretationen über Σ gibt es? Erläutern Sie kurz.

Teil (b)

Wieviele verschiedenen Herbrand-Modelle über Σ hat die folgende Formel?

$$\forall x\,(p(x) \rightarrow p(f(x))) \wedge \forall x\,(p(f(x)) \rightarrow p(x))$$

Erläutern Sie kurz.

Aufgabe 4 *(Tableaus)* (12 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Formel mittels eines geschlossenen AMGU-Tableaus:

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(r(x,y) \vee p(x) \vee r(x,z)) \rightarrow \forall x\,\exists y\,(r(x,y) \vee p(x))$$

Aufgabe 5 *(Kritische Paare, LPO)* (10 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ mit $\Omega = \{b, f, g, h, k\}$, und sei E die folgende Gleichungsmenge:

$$\begin{aligned} \{\ g(f(x), x, b) &\approx f(g(x, x, y)), \\ h(f(h(x))) &\approx k(x), \\ g(h(z), b, z) &\approx g(z, f(b), z)\ \} \end{aligned}$$

Finden Sie eine Präzedenz $>$ auf Ω, so daß die von $>$ induzierte lexikographische Pfadordnung die folgenden Eigenschaften hat:

(i) jede Gleichung $s \approx t$ in E kann zu einer Termersetzungsregel $s \to t$ oder $t \to s$ orientiert werden, deren linke Seite strikt größer als die rechte Seite ist;

(ii) die resultierende Menge von Termersetzungsregeln hat keine nicht-trivialen kritischen Paare.

Aufgabe 6 *(Superposition)* (10 Punkte)

Eine Klausel C heißt *semantische Tautologie*, falls C gültig ist. Beweisen Sie, daß das Problem, ob eine Klausel eine semantische Tautologie ist, mittels des Superpositionskalküls entschieden werden kann.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß jede Superpositionsinferenz zwischen zwei Grundeinheitsklauseln (Grundklauseln mit nur einem Literal) eine Simplifikation ist.

Aufgabe 7 *(Superposition)* (10 Punkte)

Sei $C = C' \vee s \approx t$ eine Klausel, so daß $s \approx t$ strikt maximal in C ist und $s \succ t$. Beweisen Sie, daß die Konklusion der positiven Superpositionsinferenz zwischen C und (einer umbenannten Kopie von) C an der Spitze von s redundant ist.